УДК 514.75

Н. В. Виноградова, О. В. Воротникова, М. В. Кретов

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта, г. Калининград)

О подклассах комплексов эллиптических параболоидов

В трехмерном аффинном пространстве продолжается исследование комплексов (трехпараметрических семейств) эллиптических параболоидов. Получены геометрические свойства двух подклассов рассматриваемого многообразия фигур.

***Ключевые слова*:** эллиптический параболоид, аффинное пространство, комплекс, многообразие, репер, система уравнений Пфаффа, индикатриса, характеристическое многообразие, фокальное многообразие, конгруэнция, деривационные формулы.

Продолжаем исследовать комплекс Π_3 эллиптических параболоидов, отнесенный к реперу $R = \{ A, \bar{e}_i \}$, i, j, k, …= 1, 2, 3, который геометрически охарактеризован в работе [1].

Уравнение эллиптического параболоида q в репере R имеет вид

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0. \quad (1)$$

В работе [1] исследовано многообразие $\hat{\Pi}_3$, выделенное из комплексов Π_3, когда индикатрисы векторов $\bar{e}_i$ описывают линии с касательными, параллельными вектору $\bar{e}_1$, а конец p_1 вектора $\bar{e}_1 + \bar{e}_3$ принадлежит характеристическому многообразию образующего элемента [2].

В настоящей работе проведем исследование многообразия Π_3^1, выделенное из комплексов Π_3 по другим геометрическим соображениям.

Определение 1. *Комплексом* Π_3^1 *эллиптических параболоидов назовем комплекс* Π_3, *для которого индикатрисы векторов* $\bar{e}_1$ *и* $\bar{e}_2$ *описывают линии с касательными, параллельными вектору* $\bar{e}_2$, *а индикатриса вектора* $\bar{e}_3$ *описывает линию с касательной, параллельной вектору* $\bar{e}_1$.

Согласно определению 1 система уравнений Пфаффа комплекса Π_3^1 примет вид

$$\begin{gathered}\omega_2^2 = A_{2k}^2\theta^k, \omega_1^2 = B_{13}^2\theta^3,\\ \omega^3 = \omega_1^1 = \omega_1^3 = \omega_2^1 = \omega_2^3 = \omega_3^2 = \omega_3^3 = 0.\end{gathered} \tag{2}$$

Комплексы Π_3^1 существуют с произволом одной функции трех аргументов [3].

В работе [1] через p_2 обозначен конец вектора $\bar{e}_2 + \bar{e}_3$. Обозначим через p_3 точку с координатами

$$-A_{21}^2/(A_{22}^2)^2, -1/A_{22}^2, (A_{22}^2)^2(B_{13}^2A_{21}^2/(A_{22}^2)^3 + A_{23}^2/(A_{22}^2)^2)/A_{21}^2.$$

Теорема 1. *Характеристическое многообразие [2] эллиптического параболоида, описывающего комплекс* Π_3^1, *состоит из двух объектов: координатной прямой* $(A, \bar{e}_3)$ *и точки* p_3.

Доказательство. Характеристическое многообразие эллиптического параболоида q, являющегося образующим элементом комплекса Π_3^1, задается следующей системой уравнений:

$$\begin{gathered}x^1 + A_{21}^2(x^2)^2 = 0, x^2 + A_{22}^2(x^2)^2 = 0,\\ x^1x^3 + B_{13}^2x^1x^2 + A_{23}^2(x^2)^2 = 0,\end{gathered} \tag{3}$$

откуда следует утверждение теоремы.

Следствие. *Вершина эллиптического параболоида принадлежит фокальному многообразию [2] образующего элемента комплекса* Π_3^1.

Теорема 2. *Комплексы* Π_3^1 *обладают следующими геометрическими свойствами:*

1) *концы* A_1 *и* A_3 *координатных векторов* $\bar{e}_1$ *и* $\bar{e}_3$ *соответственно, точки координатной прямой* $(A,\bar{e}_1)$ *описывают конгруэнции плоскостей, параллельных координатной плоскости* $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_2)$;

2) *конец* A_2 *координатного вектора* $\bar{e}_2$, *точки координатной прямой* $(A,\bar{e}_2)$ *описывают комплексы плоскостей, параллельных координатной плоскости* $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_2)$;

3) *координатная плоскость* $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_2)$ *неподвижна.*

Доказательство. Обозначим через M_i текущие точки соответственно координатных прямых $(A,\bar{e}_i)$, а через M_{3+i} — текущие точки соответственно координатных плоскостей $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_2)$, $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_3)$ и $(A,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$. Из системы уравнений (2) и деривационных формул репера R следует, что

$$
\begin{aligned}
&dA_1 = \theta^1\bar{e}_1 + (\theta^2 + B_{13}^2)\bar{e}_2,\\
&dA_2 = \theta^1\bar{e}_1 + (\theta^2 + A_{2k}^2)\bar{e}_2,\\
&dA_1 = (1+\theta^3)\bar{e}_1 + \theta^2\bar{e}_2,\\
&dM_1 = (dx^1 + \theta^1)\bar{e}_1 + (\theta^2 + B_{13}^2 x^1)\bar{e}_2,\\
&dM_2 = \theta^1\bar{e}_1 + (dx^2 + \theta^2 + x^2 A_{2k}^2\theta^k)\bar{e}_2,\\
&dM_3 = (\theta^1 + x^3\theta^3)\bar{e}_1 + \theta^2\bar{e}_2 + dx^3\bar{e}_3, \qquad (4)\\
&dM_4 = (dx^1 + \theta^1)\bar{e}_1 + (dx^2 + \theta^2 + B_{13}^2 x^1 + x^2 A_{2k}^2\theta^k)\bar{e}_2,
\end{aligned}
$$

$$dM_5 = (dx^1 + \theta^1 + x^3\theta^3)\overline{e}_1 + (\theta^2 + B^2_{13}x^1)\overline{e}_2 + dx^3\overline{e}_3,$$
$$dM_6 = (\theta^1 + x^3\theta^3)\overline{e}_1 + (dx^2 + \theta^2 + x^2 A^2_{2k}\theta^k)\overline{e}_2 + dx^3\overline{e}_3.$$

Продифференцировав равенства (4), убеждаемся в справедливости теоремы.

Выделим из комплексов Π^1_3 эллиптических параболоидов подкласс $\hat{\Pi}^1_3$.

Определение 2. *Комплексом* $\hat{\Pi}^1_3$ *эллиптических параболоидов назовем комплекс* Π^1_3, *если точка* p_2 *будет принадлежать характеристическому многообразию его образующего элемента.*

Из определения комплекса $\hat{\Pi}^1_3$ следует, что его система уравнений Пфаффа имеет вид

$$\begin{aligned} &\omega^2_2 = -A^2_{22}\theta^2, \omega^2_1 = B^2_{13}\theta^3, \\ &\omega^3 = \omega^1_1 = \omega^3_1 = \omega^1_2 = \omega^3_2 = \omega^2_3 = \omega^3_3 = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Комплексы $\hat{\Pi}^1_3$ существуют с произволом двух функций одного аргумента.

Обозначим через p_4 и p_5 точки с координатами соответственно $(0, -1/A^2_{22}, 0)$ и $(0, -1/A^2_{22}, 1/(A^2_{22})^2)$.

Теорема 3. *Характеристическое многообразие [2] эллиптического параболоида, описывающего комплекс* $\hat{\Pi}^1_3$, *состоит из двух параллельных прямых: координатной прямой* $(A, \overline{e}_3)$ *и параллельной ей прямой, проходящей через точку* p_4.

Доказательство теоремы следует из системы уравнений

$$x^1 = 0, x^2(A^2_{22}x^2 + 1) = 0, x^1(x^3 + B^2_{13}x^2) = 0. \tag{6}$$

Теорема 4. *Фокальное многообразие [2] эллиптического параболоида, описывающего комплекс* $\hat{\Pi}_3^1$*, состоит из двух точек: вершины параболоида и точки* p_5.

Доказательство теоремы следует из уравнения (1) и системы уравнений (6).

Теорема 5. *Комплексы* $\hat{\Pi}_3^1$ *обладают дополнительно к свойствам, сформулированным в теореме 2, следующим геометрическим свойством: конец* A_2 *координатного вектора* $\bar{e}_2$*, точки координатной прямой* $(A,\bar{e}_2)$ *описывают конгруэнции плоскостей, параллельных координатной плоскости* $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_2)$.

Доказательство следует из системы равенств (4) и правил дифференцирования с учетом определения 2.

Список литературы

1. *Виноградова Н. В., Кретов М. В.* Комплексы эллиптических параболоидов // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2010. Вып. 41. С. 35—38.

2. *Малаховский В. С., Махоркин В. В.* Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1974. Вып. 6. С. 113—133.

3. *Малаховский В. С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.

N. Vinogradova, O. Vorotnikova, M. Kretov

About subclasses of complexes of elliptic paraboloids

In three-dimensional affine space research of complexes of elliptic paraboloids proceeds. Geometrical properties of two subclasses of considered variety of figures are obtained.